



Серия №25. Теорема Шаля

15 июля

Определение. Движение – преобразование плоскости, сохраняющее расстояния, т.е. для любых двух точек A и B расстояние между ними равно расстоянию между $f(A)$ и $f(B)$.

1. Лемма о 3 гвоздях. Даны три точки A, B, C , не лежащие на одной прямой, и произвольная точка X . Докажите, что тройка расстояний AX, BX, CX однозначно задаёт положение точки X .

Следствие. Любое движение однозначно задаётся образами 3 неколлинеарных точек.

2. Некоторое движение переводит данные неколлинеарные точки A, B, C в точки A_1, B_1, C_1 соответственно. Докажите, что можно несколькими симметриями перевести данные точки в их образы, причем трёх симметрий достаточно.

Теорема Шаля. Любое движение является композицией не более, чем трёх осевых симметрий.

3. Докажите, что:

- а) Параллельный перенос $T_{\vec{a}}$ (сокр. *translation*) на вектор \vec{a} может быть представлен композицией двух симметрий.
- б) Поворот R_O^α (сокр. *rotation*) на угол α вокруг точки O может быть представлен композицией двух симметрий.
- в) Симметрия S_a (сокр. *symmetry*) относительно прямой a ... является симметрией.

4. а) Чем является композиция трёх параллельных симметрий?

б) Чем является композиция трёх симметрий, проходящих через одну точку?

в) Докажите, что композиция трёх симметрий относительно прямых общего положения (не более двух параллельных, не все проходят через одну точку) может быть представлена в виде композиции симметрии и параллельного переноса.

г) Докажите, что описанное в пункте в) движение может быть представлено и в виде композиции симметрии и параллельного переноса на вектор, параллельный оси симметрии.

Определение. Скольльзящая симметрия $T_{\vec{a}} \circ S_b$ – композиция симметрии и параллельного переноса на вектор, параллельный оси симметрии.

Теорема о классификации движений. Любое движение плоскости – S, R, T или TS .

Определение. Плоскость задаётся тремя неколлинеарными точками. Порядок нумерации этих точек производится по часовой стрелке либо против часовой стрелки. Такой порядок задаёт ориентацию плоскости. Движение может сохранять либо менять ориентацию плоскости.

5. а) Докажите, что симметрия меняет ориентацию плоскости.

б) Проведите классификацию всех типов движений по количеству неподвижных точек и сохранению ориентации.

6. Композиция двух движений по теореме Шаля – это композиция до шести осевых симметрий. Но по теореме о классификации, это всё равно S, R, T или TS . Для каждой композиции движений укажите, каким видом движения она может являться. Заполните таблицу для всех возможных случаев.

	S	R	T	TS
S	R или T			
R				
T				
TS				

7. Из бумаги вырезали два одинаковых треугольника ABC и $A_1B_1C_1$ и положили их на стол, перевернув при этом один из треугольников. Докажите, что середины отрезков AA_1 , BB_1 и CC_1 лежат на одной прямой.
8. **Теорема Ельсслева.** Коллинеарные точки A , B , C при некотором движении перешли в точки A_1 , B_1 , C_1 . Докажите, что середины отрезков AA_1 , BB_1 , CC_1 лежат на одной прямой.